4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Una de las obras de ingeniería más notables de la Grecia antigua fue el túnel de Samos. Para su construcción emplearon, indudablemente, la triangulación. (Samos es la isla griega donde nació Pitágoras, situada en la zona más oriental del Mediterráneo).

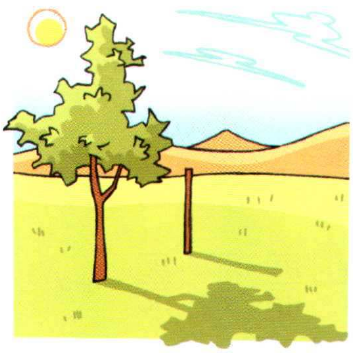
El túnel fue realizado en el siglo VI a.C. para llevar agua desde las fuentes del monte Castro a la ciudad, situada en la otra ladera del monte. Tenía unos dos metros de diámetro, casi un kilómetro de longitud, y se excavó partiendo simultáneamente de los dos extremos, lo que suponía una planificación tecnológica sorprendente. Aunque hubo un pequeño fallo de precisión y tuvieron que lograr la unión de los dos tramos con una pequeña curva, la construcción supuso una verdadera hazaña.

Túnel de Samos

REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Para calcular la altura de un árbol, podemos seguir el procedimiento que utilizó Tales de Mileto para hallar la altura de una pirámide de Egipto: comparar su sombra con la de una vara vertical cuya longitud es conocida.



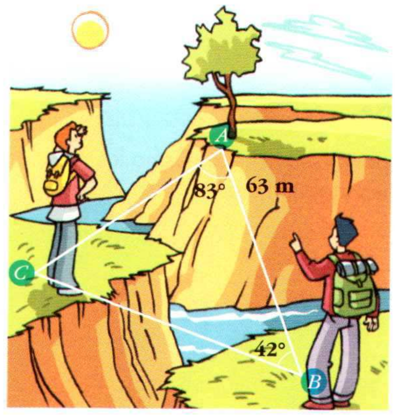
- Hazlo tú siguiendo este método y sabiendo que:
  — la vara mide 124 cm,
  — la sombra de la vara mide 37 cm,
  — la sombra del árbol mide 258 cm.

  Para solucionar este problema habrás utilizado la semejanza de dos triángulos.

Problema 2

Bernardo conoce la distancia $\overline{AB}$ *a la que está del árbol y los ángulos* $\widehat{CBA}$ *y* $\widehat{BAC}$, *y quiere calcular la distancia* $\overline{BC}$ *a la que está de Carmen.*

Datos: $\overline{AB} = 63$ m $\widehat{CBA} = 42°$ $\widehat{BAC} = 83°$



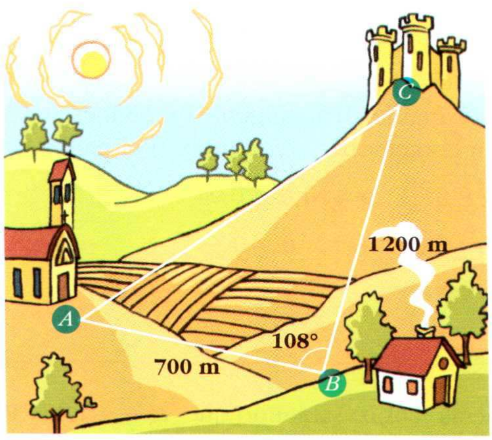
- Para resolver el problema, primero *realiza un dibujo a escala* 1:1 000 (1 m → 1 mm). Después, mide la longitud del segmento *BC* y, deshaciendo la escala, obtendrás la distancia a la que Bernardo está de Carmen.

Problema 3

- Análogamente puedes resolver este otro:

  Bernardo ve desde su casa el castillo y la abadía. Conoce las distancias a ambos lugares, pues ha hecho el camino a pie muchas veces; y quiere averiguar la distancia del castillo a la abadía. Para ello debe, previamente, medir el ángulo $\widehat{CBA}$.

  Datos: $\overline{BC} = 1\,200$ m $\overline{BA} = 700$ m $\widehat{CBA} = 108°$

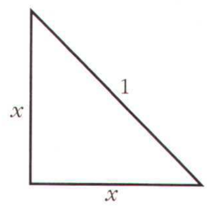


- Utiliza ahora la escala 1:10 000 (100 m → 1 cm).

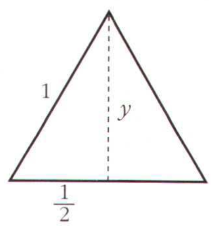
Problema 4

- Calcula, aplicando el teorema de Pitágoras:

  a) Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1.



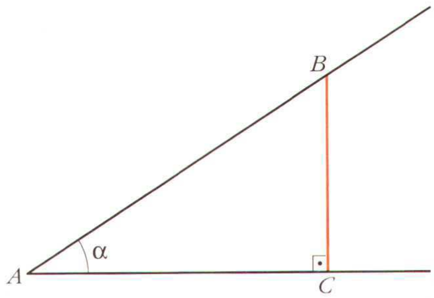
  b) La altura de un triángulo equilátero de lado 1.



Haz todos los cálculos manteniendo los radicales. Debes llegar a las siguientes soluciones:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0° A 90°)



Recordemos las **razones trigonométricas** (seno, coseno y tangente) de un ángulo agudo, α, definidas a partir de un triángulo rectángulo, ABC, construido sobre él:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad cos\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Entre ellas se dan las siguientes **relaciones fundamentales**:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad \text{pues } (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \overset{(*)}{=} \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2} = 1;$$ (*) Por el teorema de Pitágoras.

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \quad \text{pues } \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\ \alpha$$

$$\frac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + tg^2\ \alpha \quad \text{pues } \frac{1}{cos^2\ \alpha} = \frac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} =$$

$$= \left(\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)^2 + \frac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1$$

RECUERDA

$(sen\ \alpha)^2$ se pone $sen^2\ \alpha$. Lo mismo las demás razones trigonométricas.

1. En tu CD tienes actividades con las que **repasar** el cálculo de razones trigonométricas con calculadora.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Conociendo $cos\ \alpha = 0{,}86$ calcular $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.*

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + 0{,}86^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - 0{,}86^2} = 0{,}51$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0{,}51}{0{,}86} = 0{,}59$

2. *Conociendo $tg\ \alpha = 2{,}83$ calcular $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.*

Llamamos $s = sen\ \alpha$ y $c = cos\ \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} s^2 + c^2 = 1 \\ s/c = 2{,}83 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow (2{,}83c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 9{,}0089c^2 = 1 \rightarrow c = 0{,}33 \\ \rightarrow s = 2{,}83c \end{array}$$

$cos\ \alpha = 0{,}33;\ sen\ \alpha = 2{,}83 \cdot 0{,}33 = 0{,}93$

3. *Calcular $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ con calculadora, sabiendo que $tg\ \alpha = 2{,}83$.*

Empezamos poniendo la calculadora en grados (MODO DEG).

SHIFT tan 2,83 = 70.53878 SHIFT °' " 70°32,20 Min

Hemos obtenido que α, el ángulo cuya tangente es 2,83, es 70° 32' 20''. Metemos este resultado en la memoria y recurrimos a él mediante MR.

sin MR = 0.942867 → $sen\ \alpha = 0{,}94$

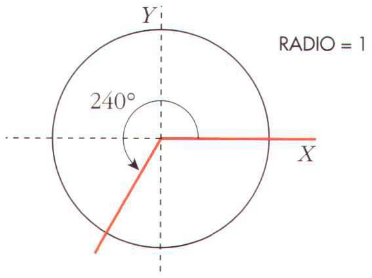
cos MR = 0.333168 → $cos\ \alpha = 0{,}33$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula $tg\ \alpha$ sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}39$. Hazlo, también, con calculadora.

2. Calcula $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 1{,}28$. Hazlo, también, con calculadora.

4.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0° A 360°)



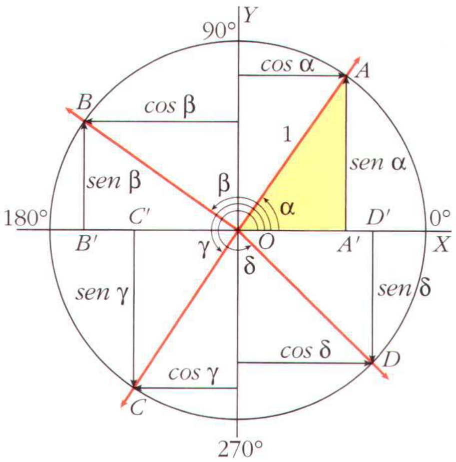
CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Circunferencia goniométrica

Trazamos una circunferencia de radio 1. Tomamos un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la circunferencia.

Los ángulos se sitúan sobre la circunferencia del siguiente modo:

- Su vértice, en el centro.
- Uno de los lados, coincidiendo con el semieje positivo de las *X*.
- El otro lado, donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.



Seno y coseno de un ángulo entre 0° y 360°

Si situamos un ángulo agudo, α, sobre la circunferencia goniométrica, $cos\ \alpha$ y $sen\ \alpha$ son las coordenadas del punto A en el que el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia. Por extensión, definimos:

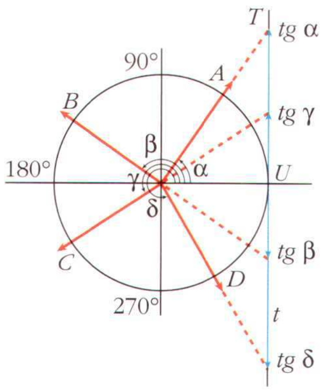
($cos\ \phi$, $sen\ \phi$) son las coordenadas del punto en el que el segundo lado de un ángulo cualquiera, ϕ, corta a la circunferencia goniométrica.

Se cumple, en todos los casos, que:

$$(sen\ \phi)^2 + (cos\ \phi)^2 = 1$$

La dirección de las flechas indica el signo:

$$cos: \begin{cases} \text{derecha } + \\ \text{izquierda } - \end{cases} \qquad sen: \begin{cases} \text{arriba } + \\ \text{abajo } - \end{cases}$$



Tangente de un ángulo entre 0° y 360°

Situamos el ángulo sobre la circunferencia goniométrica. Trazamos la recta t tangente a la circunferencia en U. El segundo lado del ángulo, o su prolongación, corta a la recta t en el punto T. La *tangente* del ángulo es igual a la medida del segmento $\overline{UT}$, con el signo correspondiente. En todos los casos se cumple la relación:

$$tg\ \phi = \frac{sen\ \phi}{cos\ \phi}$$

Los ángulos de 90° y 270° *no tienen tangente*.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sabiendo que el ángulo α está en el 2.° cuadrante ($90° < \alpha < 180°$) y $sen\ \alpha = 0{,}62$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

2. Sabiendo que el ángulo α está en el 3.er cuadrante ($180° < \alpha < 270°$) y $cos\ \alpha = -0{,}83$, calcula $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

3. Sabiendo que el ángulo α está en el 4.° cuadrante ($270° < \alpha < 360°$) y $tg\ \alpha = -0{,}92$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.

4. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

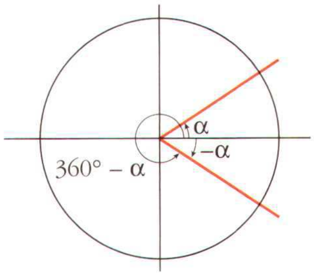
Ayúdate de la representación de los ángulos en una circunferencia goniométrica.

4.3 AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

Los valores comprendidos entre 0° y 360° nos permiten expresar la medida de cualquier ángulo. Por ejemplo, podemos darle sentido al ángulo de 400° = 360° + 40° al situarlo sobre la circunferencia goniométrica, pues el segundo lado dará una vuelta completa (360°) más un ángulo de 40°:

$$400° = 360° + 40° = 40°$$

En general, $\alpha = \alpha + 360° \cdot n$, donde n es un número entero cualquiera (positivo o negativo).



Si $0° < \alpha < 180°$, entonces a $360° - \alpha$ se le suele llamar, simplemente, $-\alpha$. Se dice que α y $-\alpha$ son opuestos.

Ángulos negativos

El ángulo de 300° puede expresarse así: 300° = 300° – 360° = –60°.

Por eso, con frecuencia, los ángulos que quedan situados bajo el eje X, es decir, los comprendidos entre 180° y 360°, se designan con una medida negativa. Por ejemplo, para expresar con valores comprendidos entre –180° y 180° los ángulos 775° ó 1 400°, procederemos así:

$$775° = 360° \cdot 2 + 55° = 55°$$

$$1\,400° = 360° \cdot 3 + 320° = 320° = 320° - 360° = -40°$$

Razones trigonométricas

Puesto que $\alpha = \alpha + 360° \cdot n$, las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + 360° \cdot n$ coinciden con las de α. La calculadora da directamente el valor de *sen*, *cos* o *tg* de cualquier ángulo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las razones del ángulo 2 797°:*

a) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo [0°, 360°).

b) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo (–180°, 180°].

c) Directamente con la calculadora.

a) 2 797° | 360°
 277°   7

$$2\,797° = 277° + 7 \cdot 360°$$

b) Como 277° > 180°, le restamos 360°:

$$277° - 360° = -83°$$

Por tanto 2 797° = 277° = –83°

c) Las razones trigonométricas se pueden hallar para cualquiera de las tres expresiones (2 797°, 277° ó –83°) y los resultados coinciden. Lo hacemos directamente con 2 797°. Hazlo tú con las otras dos.

sen 2 797° = –0,99   *cos* 2 797° = 0,12   *tg* 2 797° = –8,14

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo 2 397°:

a) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo [0°, 360°).

b) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo (–180°, 180°].

c) Directamente con la calculadora.

2. Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:

a) 396°   b) 492°

c) 645°   d) 3 895°

e) 7 612°   f) 1 980°

LENGUAJE MATEMÁTICO

CÓMO INTERPRETA LOS ÁNGULOS LA CALCULADORA

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Como sabes, la calculadora da directamente el valor del *sen*, *cos* o *tg* de cualquier ángulo del intervalo [0°, 360°) sin más que dar a la tecla correspondiente [sin] [cos] [tan]. ¿Cómo interpreta los ángulos de otras medidas? Lo hace perfectamente: de forma automática calcula el correspondiente ángulo del intervalo [0°, 360°) y da, directamente, la razón trigonométrica solicitada. Por ejemplo:

[sin] 8953 [=] {-0.7313537016}

[cos] 1370 [=] {0.34202014332}

[tan] 37901 [=] {-5.14455401597}

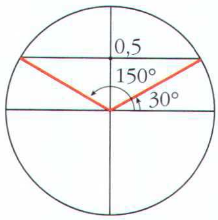
Hay algunas excepciones:

[tan] 46170 [=] {-E-}

¿Por qué da mensaje de error? Sencillamente porque 46 170° = 128 × 360° + 90° y, como sabemos, no existe la tangente de 90°. Es decir, la calculadora hace una interpretación muy razonable de estos ángulos y sus razones trigonométricas.

También da mensaje de error cuando le pedimos la razón trigonométrica de un ángulo absurdamente grande. Por ejemplo $3{,}7 \times 10^{20}$. Estos ángulos no los interpreta.

Pregunta inversa: ¿cuál es el ángulo cuyo seno es …?



Si le preguntamos a la calculadora cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5, ¿qué nos contestará? ¿30° o 150°? ¿O acaso 390°? ¿750°? Todos esos ángulos y otros muchos más tienen su seno igual a 1/2. Probémoslo:

[SHIFT] [sin] 0,5 [=] {30}   ¿Por qué responde 30°?

Si le preguntamos a la calculadora **cuál es el ángulo cuya razón trigonométrica es un cierto número**, responde del siguiente modo:

PARA	DA UN VALOR ENTRE
seno	–90° y 90°
coseno	0° y 180°
tangente	–90° y 90°

(DEG)

[SHIFT] [sin] –0,5 [=] {-30}

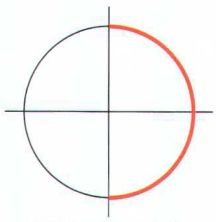
[SHIFT] [cos] –0,5 [=] {120}

[SHIFT] [tan] –4 [=] {-75.963...}

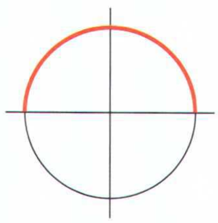
[SHIFT] [sin] 0,8 [=] {53.13010...}

[SHIFT] [cos] 0,8 [=] {36.8698...}

[SHIFT] [tan] 1 [=] {45}



seno y tangente



coseno

EJERCICIOS

1. Di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin preguntarlo a la calculadora. Después, compruébalo con su ayuda:

a) *sen*(37 × 360° – 30°)

b) *cos*(–5 × 360° + 120°)

c) *tg*(11 × 360° – 135°)

d) *cos*(27 × 180° + 135°)

2. Repite con la calculadora estos cálculos:

[SHIFT] [tan] 1 [EXP] 10 [=] {89.99999999}

[SHIFT] [tan] 1 [EXP] 20 [=] {90}

Explica los resultados. ¿Cómo es posible que diga que el ángulo cuya tangente vale 10^{20} es 90° si 90° no tiene tangente?

4.4 RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

RECUERDA

$360° - \alpha = -\alpha$ es el ángulo opuesto de α.

¡ATENCIÓN!

Razona en cada caso sobre los dos triángulos iguales y ten en cuenta los signos de las razones trigonométricas que se relacionan.

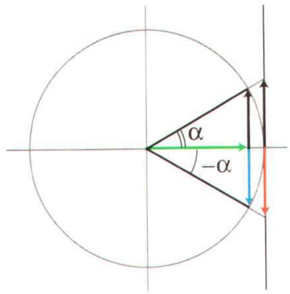
Las siguientes relaciones son muy útiles. No es necesario que las aprendas de memoria, solo que las visualices. Si consigues verlas con claridad (lo cual es muy fácil), podrás repetirlas cuando las necesites.

- **Ángulos opuestos:** α **y** $-\alpha$

$sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha$

$cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha$

$tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

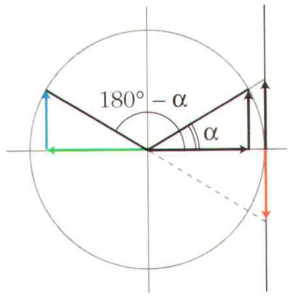


- **Ángulos suplementarios:** α **y** $180° - \alpha$

$sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha$

$cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$

$tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha$

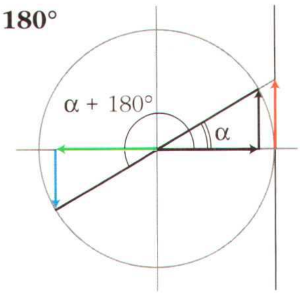


- **Ángulos que difieren en 180°:** α **y** $\alpha + 180°$

$sen\ (\alpha + 180°) = -sen\ \alpha$

$cos\ (\alpha + 180°) = -cos\ \alpha$

$tg\ (\alpha + 180°) = tg\ \alpha$

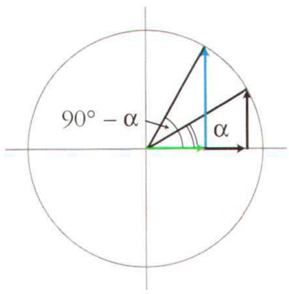


- **Ángulos complementarios:** α **y** $90° - \alpha$

$sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha$

$cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha$

$$tg\ (90° - \alpha) = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

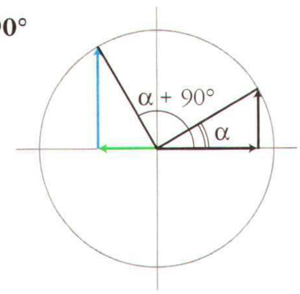


- **Ángulos que difieren en 90°:** α **y** $\alpha + 90°$

$sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha$

$cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha$

$$tg\ (90° + \alpha) = \frac{cos\ \alpha}{-sen\ \alpha} = \frac{-1}{tg\ \alpha}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Sabiendo que:*

sen $25° = 0{,}423$

cos $25° = 0{,}906$

tg $25° = 0{,}466$

hallar todas las razones trigonométricas de:

a) $65°$

b) $115°$

c) $155°$

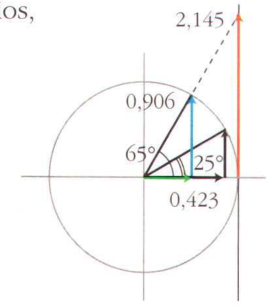
d) $205°$

a) Los ángulos 65° y 25° son complementarios, por lo que:

$sen\ 65° = cos\ 25° = 0{,}906$

$cos\ 65° = sen\ 25° = 0{,}423$

$tg\ 65° = \dfrac{1}{tg\ 25°} = \dfrac{1}{0{,}466} = 2{,}145$

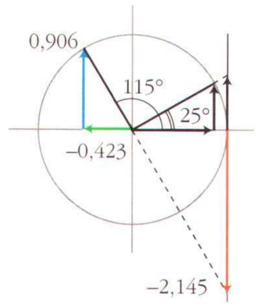


b) $115° = 25° + 90°$, por tanto:

$sen\ 115° = cos\ 25° = 0{,}906$

$cos\ 115° = -sen\ 25° = -0{,}423$

$tg\ 115° = \dfrac{-1}{tg\ 25°} = -2{,}145$

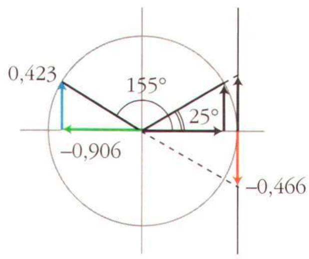


c) Los ángulos de 25° y 155° son suplementarios, luego:

$sen\ 155° = sen\ 25° = 0{,}423$

$cos\ 155° = -cos\ 25° = -0{,}906$

$tg\ 155° = -tg\ 25° = -0{,}466$

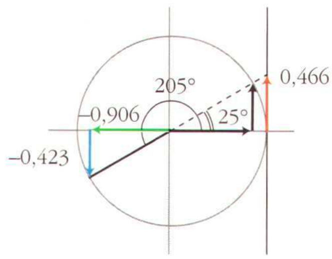


d) $205° = 25° + 180°$, por tanto:

$sen\ 205° = -sen\ 25° = -0{,}423$

$cos\ 205° = -cos\ 25° = -0{,}906$

$tg\ 205° = tg\ 25° = 0{,}466$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:

$sen\ 35° = 0{,}57$; $cos\ 35° = 0{,}82$; $tg\ 35° = 0{,}70$

2. Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

3. Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:

a) $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2}$, $tg\ \alpha > 0$ b) $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4}$, $\alpha > 90°$

c) $tg\ \beta = -1$, $cos\ \beta < 0$ d) $tg\ \alpha = 2$, $cos\ \alpha < 0$

4.5 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

PREGUNTAS CLAVE PARA RESOLVER UN TRIÁNGULO

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es el elemento desconocido?
- ¿Qué razón trigonométrica liga los elementos conocidos y desconocidos?

2. **HOJA DE CÁLCULO** sobre la que puedes corregir tus resoluciones de triángulos rectángulos.

Casos de resolución de triángulos rectángulos

Hemos de tener en cuenta que en un triángulo rectángulo siempre conocemos un ángulo (el recto).

ELEMENTOS CONOCIDOS	CÓMO SE CALCULAN LOS DEMÁS
CASO I Dos lados	• El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. • El ángulo que forman los dos lados conocidos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona.
CASO II Un lado Un ángulo	• Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. • El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos.

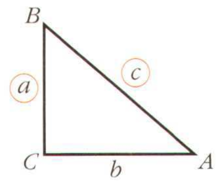
EJERCICIOS RESUELTOS

1. *En un triángulo rectángulo se conocen un cateto, $a = 11$ cm, y la hipotenusa, $c = 20$ cm. Hallar los demás elementos.*

El otro cateto: $b = \sqrt{20^2 - 11^2} = 16{,}7$ cm

Un ángulo: $sen\ \hat{A} = \dfrac{11}{20} = 0{,}55 \rightarrow \hat{A} = 33°\ 22'$

El otro ángulo agudo: $\hat{B} = 90° - \hat{A} = 56°\ 38'$

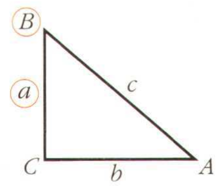


2. *En un triángulo rectángulo del que se conocen $\hat{B} = 50°$ y un cateto $a = 15$ cm, hallar los demás elementos.*

$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} \rightarrow b = a\ tg\ \hat{B} = 15\ tg\ 50° = 17{,}88$ cm

$cos\ \hat{B} = \dfrac{a}{c} \rightarrow c = \dfrac{a}{cos\ \hat{B}} = \dfrac{15}{cos\ 50°} = 23{,}34$ cm

$\hat{A} = 90° - \hat{B} = 90° - 50° = 40°$

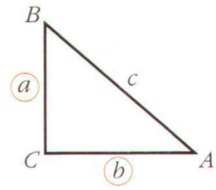


3. *En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos, $a = 47$ m y $b = 62$ m. Hallar la hipotenusa y los ángulos.*

La hipotenusa: $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77{,}80$ m

Un ángulo: $tg\ \hat{A} = \dfrac{47}{62} = 0{,}758 \rightarrow \hat{A} = 37°\ 9'\ 52''$

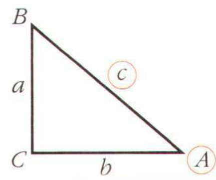
El otro ángulo agudo: $\hat{B} = 90° - \hat{A} = 52°\ 50'\ 8''$



4. *En un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y un ángulo, $\hat{A} = 23°$. Calcular el lado a.*

Para relacionar un ángulo con su cateto opuesto y con la hipotenusa, recurrimos al seno:

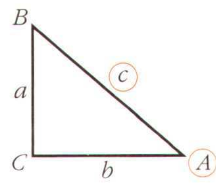
$sen\ \hat{A} = \dfrac{a}{c} \rightarrow a = c\ sen\ \hat{A} = 72\ sen\ 23° = 28{,}13$ m



5. *En un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y un ángulo, $\hat{A} = 23°$. Calcular el lado b.*

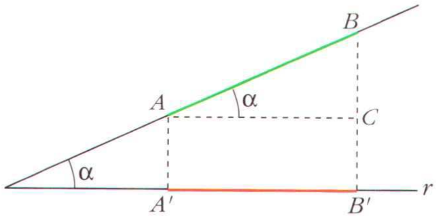
Para relacionar un ángulo con su cateto adyacente y con la hipotenusa, recurrimos al coseno:

$cos\ \hat{A} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c\ cos\ \hat{A} = 72\ cos\ 23° = 66{,}28$ m

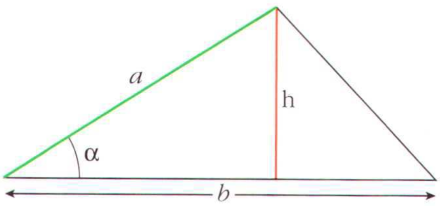


Algunos resultados muy útiles

Los siguientes resultados, ligados a la resolución de triángulos rectángulos, aparecen con tanta frecuencia que es conveniente memorizarlos:



$A'B'$ es la proyección de AB sobre la recta r.



■ Proyección de un segmento

En el triángulo ABC, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha \rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\alpha$

La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman.

■ Altura de un triángulo

En el triángulo rectángulo de la izquierda, $sen\ \alpha = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \alpha$

La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados laterales por el seno del ángulo que dicho lado forma con la base.

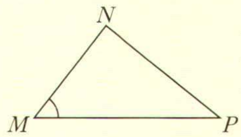
■ Área de un triángulo

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot a\ sen\ \alpha}{2} = \frac{1}{2}ab\ sen\ \alpha$$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *En el siguiente triángulo:*

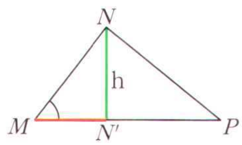


$\overline{MN} = 20$ cm
$\overline{MP} = 32$ cm
$\hat{M} = 52°$

a) Hallar la proyección de MN sobre MP.

b) Hallar el área.

a)



$\cos\hat{M} = \dfrac{\overline{MN'}}{\overline{MN}} \rightarrow \overline{MN'} = \overline{MN}\cos\hat{M} =$

$= 20 \cdot \cos 52° = 12{,}31$ cm

b) $sen\ \hat{M} = \dfrac{h}{\overline{MN}} \rightarrow h = \overline{MN}\ sen\ \hat{M} = 20 \cdot sen\ 52°$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\overline{MP} \cdot h = \dfrac{1}{2}32 \cdot 20\ sen\ 52° = 252{,}16\ \text{cm}^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC, siendo C el ángulo recto.

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula a.

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula b.

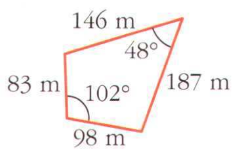
c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula b.

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula c.

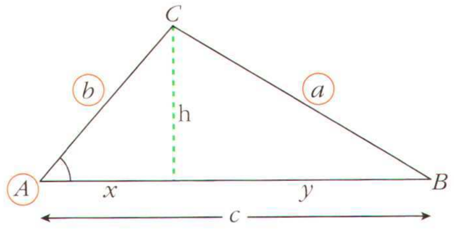
2. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?

3. Halla el área de este cuadrilátero. Sugerencia: Pártelo en dos triángulos.



4.6 ESTRATEGIA DE LA ALTURA PARA RESOLVER TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de los triángulos rectángulos, mediante la **estrategia de la altura**. Consiste en elegir adecuadamente una de sus alturas de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se tienen.



Ejemplo 1

Estamos en A. Conocemos las distancias de A a C ($b = 3\,800$ m) y de C a B ($a = 5\,600$ m). Queremos calcular la distancia de A a B ($\overline{AB} = c$).

Para ello medimos el ángulo $\hat{A} = 49°$. Y, sobre el papel, trazamos la altura h y nombramos x e y a las proyecciones de a y b sobre c.

$$x = b \cos \hat{A} = 3\,800 \cos 49° = 2\,493 \text{ m}$$

$$\text{h} = b \operatorname{sen} \hat{A} = 3\,800 \operatorname{sen} 49° = 2\,868 \text{ m}$$

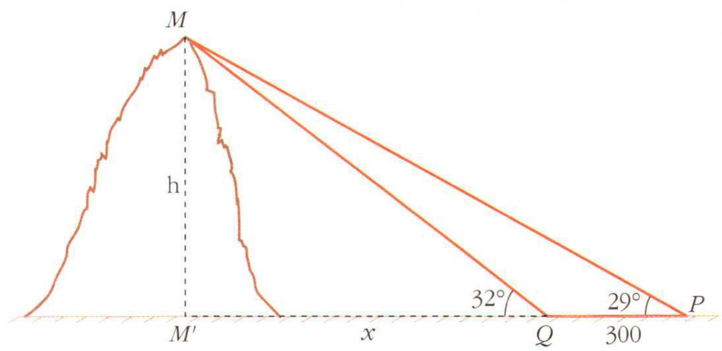
Conociendo h y a calculamos y (teorema de Pitágoras):

$$y = \sqrt{a^2 - \text{h}^2} = \sqrt{5\,600^2 - 2\,868^2} = 4\,810 \text{ m}$$

Por tanto, $c = x + y = 2\,493 + 4\,810 = 7\,303$ m

Ejemplo 2

Estamos en P, situado en un llano. Queremos hallar la altura de una montaña, M. Para ello medimos el ángulo $\hat{P}$ que forma la visual a la montaña con la horizontal ($\hat{P} = 29°$). Avanzamos 300 m hacia la montaña y volvemos a medir el ángulo ($\hat{Q} = 32°$).



$$\left.\begin{array}{l} \text{En } MM'Q,\ tg\ 32° = \dfrac{\text{h}}{x} \rightarrow \text{h} = x\ tg\ 32° \\ \text{En } MM'P,\ tg\ 29° = \dfrac{\text{h}}{x + 300} \rightarrow \text{h} = (x + 300)\ tg\ 29° \end{array}\right\} \text{Igualamos} \rightarrow$$

$$\rightarrow x\ tg\ 32° = (x + 300)\ tg\ 29° \rightarrow x(tg\ 32° - tg\ 29°) = 300\ tg\ 29° \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{300\ tg\ 29°}{tg\ 32° - tg\ 29°} = 2\,357 \text{ m}$$

Ahora volvemos a h:

$$\text{h} = x\ tg\ 32° = 2\,357\ tg\ 32° = 1\,473 \text{ m}$$

Hemos obtenido que la altura de la montaña es de 1 473 m.

SIGNIFICADO

Paradigmático: Ejemplar, que sirve de ejemplo para algo importante.

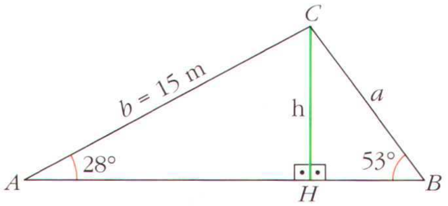
Dos situaciones paradigmáticas

Situación 1

Se relacionan dos lados y sus ángulos opuestos.

Conocemos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y b. Queremos calcular a.

Trazamos la altura sobre el lado c.



$$\left.\begin{array}{l} \text{En } AHC,\ sen\,\hat{A} = \dfrac{h}{b} \rightarrow h = b\,sen\,\hat{A} \\ \text{En } BHC,\ sen\,\hat{B} = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\,sen\,\hat{B} \end{array}\right\}\ \text{Igualamos} \rightarrow$$

$$\rightarrow b\,sen\,\hat{A} = a\,sen\,\hat{B} \rightarrow a = \frac{b\,sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} = \frac{15\,sen\,28°}{sen\,53°} = 8{,}82 \text{ m}$$

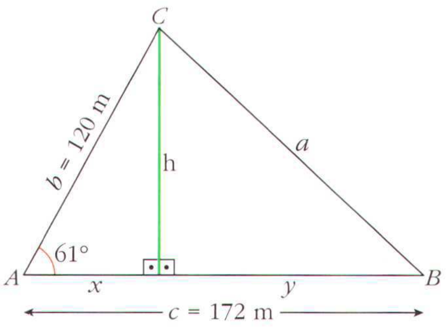
Esta forma de proceder se generalizará en el apartado siguiente, dando lugar al teorema de los senos.

Situación 2

Se relacionan los tres lados y un ángulo.

Conocemos $\hat{A}$, b y c. Queremos calcular a.

Trazamos la altura h sobre el lado c y llamamos x e y a las proyecciones de b y a sobre c.



$$x = b\,cos\,61° = 120\,cos\,61° = 58{,}18 \text{ m}$$

$$y = c - x = 172 - 58{,}18 = 113{,}82 \text{ m}$$

$$h = b\,sen\,61° = 120\,sen\,61° = 104{,}95 \text{ m}$$

A partir de h e y calculamos a (teorema de Pitágoras):

$$a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{104{,}95^2 + 113{,}82^2} = 154{,}82 \text{ m}$$

Procediendo de forma similar a esta se obtendrá, en el apartado siguiente, el teorema del coseno.

EJERCICIOS PROPUESTOS

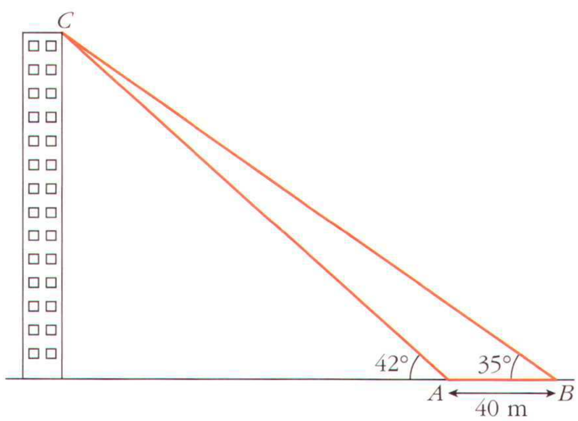
1. En un triángulo ABC conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado c.

2. En un triángulo MNP conocemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.

3. En un triángulo ABC conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado b.

4. Estamos en A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

Observa la ilustración:



4.7 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Vamos a obtener unas fórmulas que nos permitirán resolver directamente triángulos cualesquiera, sin necesidad de utilizar cada vez la estrategia de la altura para descomponerlos en dos triángulos rectángulos.

TEN EN CUENTA

¿Sabías que en todo triángulo el ángulo mayor tiene enfrente el lado mayor y el ángulo menor tiene enfrente el lado menor?

Puedes hacer la prueba construyendo un triángulo cuyos ángulos midan

$\hat{A} = 100°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 20°$

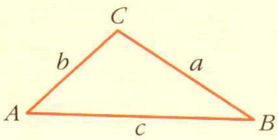
y comprobando que $a > b > c$.

El teorema de los senos concreta más esta relación entre lados y ángulos opuestos.

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c, y de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

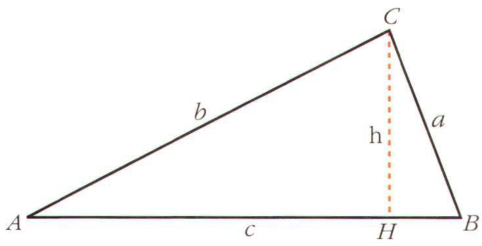
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



■ **Demostración**

Para demostrarlo aplicamos la estrategia de la altura:

Trazamos la altura h desde el vértice *C*. Los triángulos *AHC* y *BHC* son rectángulos.



Por tanto, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} sen\,\hat{A} = \frac{h}{b} &\rightarrow h = b\,sen\,\hat{A} \\ sen\,\hat{B} = \frac{h}{a} &\rightarrow h = a\,sen\,\hat{B} \end{aligned}\right\} \; b\,sen\,\hat{A} = a\,sen\,\hat{B} \rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Esta es la primera de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice *B*, relacionaríamos los lados *a* y *c* con sus ángulos opuestos, obteniendo:

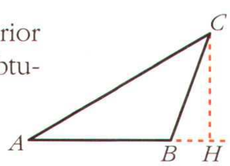
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Se completa, así, la cadena de igualdades que queríamos demostrar.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que:

$sen\,(180° - \hat{B}) = sen\,\hat{B}$



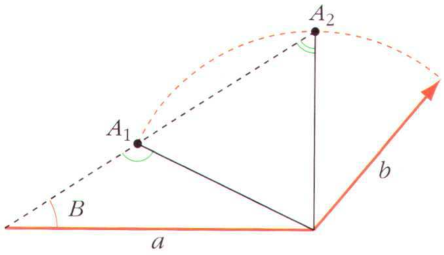
2. Demuestra detalladamente, basándote en la demostración anterior, la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Aplicaciones del teorema de los senos

El teorema da lugar a tres igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \qquad \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



$\hat{A}_1$ es obtuso; $\hat{A}_2$ es agudo.

Con ellas podemos resolver triángulos en los que los datos y la incógnita sean dos lados y sus ángulos opuestos (recuerda que conocer dos ángulos es equivalente a conocer los tres).

DATOS	INCÓGNITA
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

Cuando, al aplicar el teorema de los senos, la incógnita es uno de los ángulos, puede haber dos soluciones, pues entre 0° y 180° hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

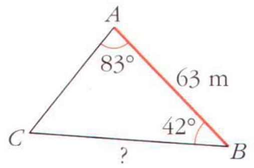
EJERCICIOS RESUELTOS

3. **HOJA DE CÁLCULO**: corrige las resoluciones de triángulos cualesquiera.

1. *El problema 2 de la página 103 de esta unidad consiste, en esencia, en lo siguiente:*

De un triángulo ABC conocemos $\overline{AB}$ = 63 m, $\hat{B}$ = 42°, $\hat{A}$ = 83°. Calcular $\overline{BC}$.

Resolverlo utilizando métodos trigonométricos.



DATOS	INCÓGNITA
$\overline{AB} = c = 63$ m $\hat{A} = 83°$ $\hat{B} = 42°$	$\overline{BC} = a$

Estamos, casi, en condiciones de aplicar el teorema de los senos. Para hacerlo, necesitamos conocer el ángulo $\hat{C}$:

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 125° = 55°$

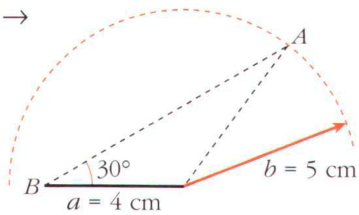
Ahora podemos relacionar a, c, $\hat{A}$ y $\hat{C}$:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \to \frac{a}{sen\,83°} = \frac{63}{sen\,55°} \to a = 63 \cdot \frac{sen\,83°}{sen\,55°} = 76{,}34 \text{ m}$$

2. *Si $a = 4$ cm, $\hat{B} = 30°$ y $b = 5$ cm, calcular $\hat{A}$.*

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \to \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{5}{sen\,30°} \to$$

$$\to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{5} = 0{,}4$$



Posibles soluciones:

$\hat{A}_1 = 23°\ 34'\ 41''$ $\quad \hat{A}_2 = 156°\ 25'\ 19''$

Sin embargo, si $\hat{A}$ fuera 156° 25' 19'', entonces sería $\hat{A} + \hat{B} > 180°$. Como esto es imposible, solo vale la solución $\hat{A}_1$.

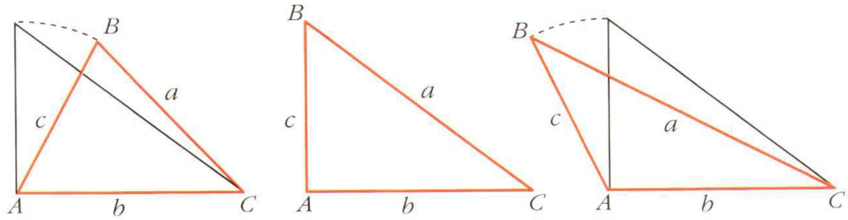
EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Resuelve el mismo problema anterior (a = 4 cm, $\hat{B}$ = 30°) tomando para b los siguientes valores: b = 1,5 cm, b = 2 cm, b = 3 cm, b = 4 cm.

Justifica gráficamente por qué se obtienen, según los casos, ninguna solución, una solución o dos soluciones.

Teorema del coseno

El teorema de Pitágoras relaciona los cuadrados de los tres lados de un triángulo rectángulo. Ahora bien, ¿y si el triángulo no es rectángulo? Parece evidente que se dan las siguientes relaciones:



$\hat{A} < 90°$	$\hat{A} = 90°$	$\hat{A} > 90°$
$a^2 < b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$

El teorema del coseno precisa más estas relaciones.

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

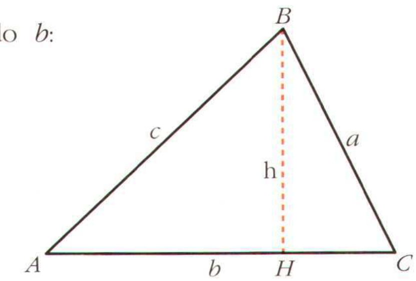
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Demostración

Trazamos la altura, h, sobre el lado b:

(1) $\overline{AH} = c \cos \hat{A}$

(2) $\overline{HC} = b - \overline{AH} = b - c \cos \hat{A}$



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC, y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), resulta:

$$a^2 = \text{h}^2 + \overline{HC}^2 = \text{h}^2 + (b - c \cos \hat{A})^2 = \text{h}^2 + b^2 + c^2 \cos^2 \hat{A} - 2bc \cos \hat{A}$$

$$c^2 = \text{h}^2 + \overline{AH}^2 = \text{h}^2 + (c \cos \hat{A})^2 = \text{h}^2 + c^2 \cos^2 \hat{A}$$

Restando: $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Despejando: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

De forma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.

Observaciones

El triángulo sobre el que se ha razonado supone que tanto $\hat{A}$ como $\hat{C}$ son ángulos agudos. Puede repetirse el razonamiento para los siguientes casos y en todos ellos se llega a la misma fórmula:

a) $\hat{A} < 90°$, $\hat{C} > 90°$ b) $\hat{A} < 90°$, $\hat{C} = 90°$ c) $\hat{A} = 90°$ d) $\hat{A} > 90°$

Aplicaciones del teorema del coseno

Como ves, el teorema del coseno sirve para relacionar los tres lados de un triángulo con uno de sus ángulos.

Por tanto, se podrá resolver con él cualquier triángulo en el que se conozcan los tres lados, o bien dos lados y un ángulo.

DATOS	INCÓGNITA
Los tres lados	Cualquier ángulo
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	El otro lado
Dos lados y el ángulo que forman	El otro lado
	Otro ángulo (*)

(*) Este es el único caso en el que no basta con aplicar uno de los teoremas: con el teorema del coseno calcularemos el otro lado y, después, con el teorema de los senos, hallamos el ángulo deseado.

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (4) con **CALCULADORA GRÁFICA** (5) y con **HOJA DE CÁLCULO** (6) algunos aspectos de esta unidad.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *El problema 3 de la página 103 consiste, en esencia, en calcular* $\overline{AC}$ *en un triángulo ABC del que conocemos:*

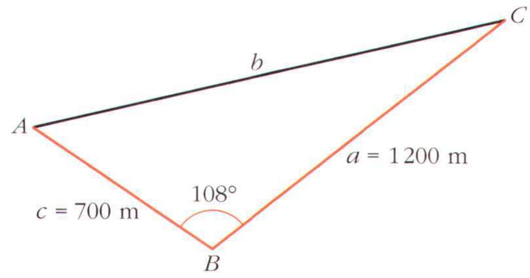
$\overline{BC} = 1\,200$ *m*

$\overline{BA} = 700$ *m*

$\hat{B} = 108°$

Resolverlo trigonométricamente.

Hemos de relacionar los tres lados a, b (incógnita), c y el ángulo $\hat{B}$. Podemos, pues, aplicar el teorema del coseno.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \;\rightarrow\; b = \sqrt{1\,200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1\,200 \cdot 700 \cdot \cos 108°}$$

$$b = 1\,564{,}97 \text{ m}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 10$ cm

b) $b = 22$ cm; $a = 7$ cm; $\hat{C} = 40°$

c) $a = 8$ m; $b = 6$ m; $c = 5$ m

d) $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\hat{A} = 105°$

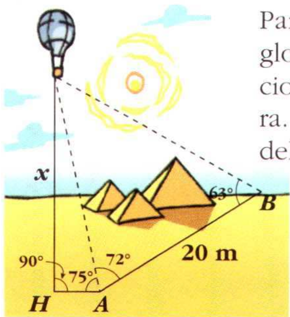
e) $a = 4$ m; $\hat{B} = 45°$ y $\hat{C} = 60°$

f) $b = 5$ m; $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

5. Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm, y uno de sus lados, 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32°. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.

6. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46°$ y $\widehat{BCA} = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

7.



Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

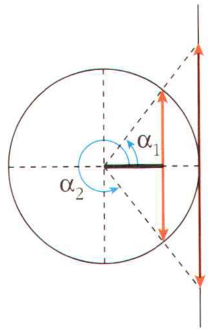
1 Relación entre las razones trigonométricas

Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes casos:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

b) $tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ *y* $\alpha > 90°$

a) $sen^2\alpha + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$



Hay dos soluciones, α_1 y α_2:

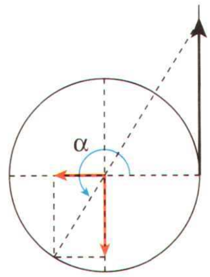
- α_1 está en el primer cuadrante.

$$sen\,\alpha_1 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad tg\,\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- α_2 está en el cuarto cuadrante.

$$sen\,\alpha_2 = \frac{-2}{3} \quad \rightarrow \quad tg\,\alpha_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Llamamos $s = sen\,\alpha$ y $c = \cos\alpha$.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{c} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s = \dfrac{\sqrt{7}}{3}c \\ \\ \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}c\right)^2 + c^2 = 1 \rightarrow c = \pm\dfrac{3}{4} \end{array}$$

Como $\alpha > 90°$ y $tg\,\alpha > 0$, α está en el tercer cuadrante. Por tanto:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{4} \qquad sen\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

2 Relaciones entre las razones trigonométricas de distintos ángulos

Relaciona las razones trigonométricas de los siguientes ángulos con las de un ángulo agudo conocido y di su valor sin utilizar la calculadora:

a) 135°

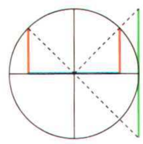
b) 240°

c) 330°

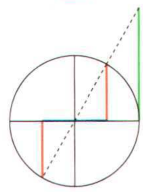
d) –210°

e) 1 845°

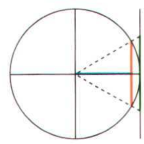
a) $135° = 180° - 45°$ $\left\{\begin{array}{l} sen\,135° = sen\,45° = \sqrt{2}/2 \\ \cos 135° = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2 \\ tg\,135° = -tg\,45° = -1 \end{array}\right.$



b) $240° = 180° + 60°$ $\left\{\begin{array}{l} sen\,240° = -sen\,60° = -\sqrt{3}/2 \\ \cos 240° = -\cos 60° = -1/2 \\ tg\,240° = tg\,60° = \sqrt{3} \end{array}\right.$

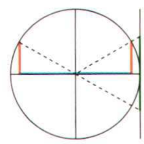


c) $330° = 360° - 30°$ $\left\{\begin{array}{l} sen\,330° = -sen\,30° = -1/2 \\ \cos 330° = \cos 30° = \sqrt{3}/2 \\ tg\,330° = -tg\,30° = -\sqrt{3}/3 \end{array}\right.$

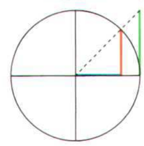


d) $-210° + 360° = 150°$

$150° = 180° - 30°$ $\left\{\begin{array}{l} sen\,(-210°) = sen\,30° = 1/2 \\ \cos(-210°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2 \\ tg\,(-210°) = -tg\,30° = -\sqrt{3}/3 \end{array}\right.$



e) $1845° = 45° + 360° \cdot 5$ $\left\{\begin{array}{l} sen\,1845° = sen\,45° = \sqrt{2}/2 \\ \cos 1845° = \cos 45° = \sqrt{2}/2 \\ tg\,1845° = tg\,45° = 1 \end{array}\right.$



3 Calculadora

En cada uno de los siguientes casos, busca, con ayuda de la calculadora, dos ángulos del intervalo [0, 360°) que cumplan la condición dada:

a) tg α = –2,64

b) sen α = –0,45

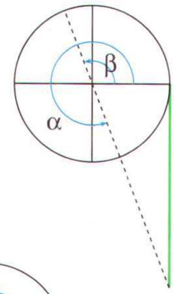
a) SHIFT tan 2.64 +/– = -69.2539... Min

- 360 + MR = SHIFT °'"

  α = 290° 44' 46''

- 180 + MR = SHIFT °'"

  β = 110° 44' 46''



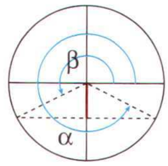
b) SHIFT sin 0.45 +/– = -26.7436... Min

- 360 + MR = SHIFT °'"

  α = 333° 15' 23''

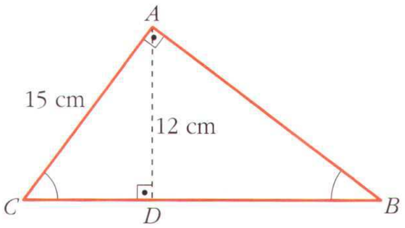
- 180 – MR = SHIFT °'"

  β = 206° 44' 37''



4 Resolución de triángulos rectángulos

Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto $\overline{AC}$ = 15 cm y la altura relativa a la hipotenusa, $\overline{AD}$ = 12 cm.



Al trazar la altura $\overline{AD}$, se forman dos triángulos rectángulos, *ADC* y *ADB*.

- Calculamos el ángulo $\hat{C}$ en el triángulo *ADC*:

  $sen\, \hat{C} = \dfrac{12}{15} \rightarrow \boxed{\hat{C} = 53° 7' 48''}$ (En la calculadora, SHIFT sin 0,8 = SHIFT °'")

- Calculamos el ángulo $\hat{B}$ en el triángulo *ABC*:

  $\hat{B} = 90° - \hat{C} = \boxed{36° 52' 12'' = \hat{B}}$

- Calculamos $\overline{AB}$ en el triángulo *ADB*:

  $sen\, \hat{B} = \dfrac{12}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{12}{sen\, 36° 52' 12''} = \boxed{20 \text{ cm} = \overline{AB}}$

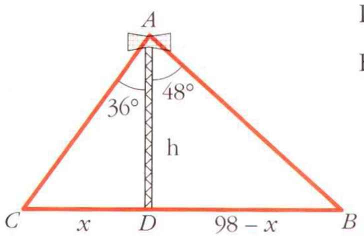
- La hipotenusa $\overline{CB}$ del triángulo *ABC* la calculamos por el teorema de Pitágoras:

  $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \rightarrow \overline{CB}^2 = 15^2 + 20^2 \rightarrow \boxed{\overline{CB} = 25 \text{ cm}}$

5 Estrategia de la altura

Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36° y 48°. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 m.

Calcula la altura de la antena.



La antena es una altura del triángulo *ABC*.

En el triángulo rectángulo *ADC*:

$$tg\, 36° = \frac{x}{h} \rightarrow x = h \cdot tg\, 36°$$

En el triángulo rectángulo *ABD*:

$$tg\, 48° = \frac{98 - x}{h} \rightarrow h \cdot tg\, 48° = 98 - x$$

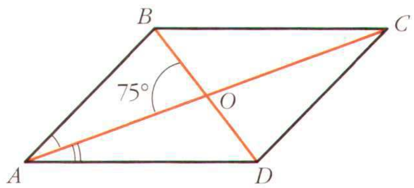
Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$h \cdot tg\, 48° = 98 - h \cdot tg\, 36° \rightarrow h \cdot tg\, 48° + h \cdot tg\, 36° = 98 \rightarrow$$

$$\rightarrow h\, (tg\, 48° + tg\, 36°) = 98 \rightarrow h = \frac{98}{tg\, 48° + tg\, 36°} \rightarrow \boxed{h = 53{,}3 \text{ m}}$$

6 Resolución de triángulos

Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.



Como *las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio,* $\overline{OB} = 3$ cm y $\overline{OA} = 7$ cm.

- En el triángulo ABO, hallamos $\overline{AB}$ aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75° \approx 47{,}13 \rightarrow \overline{AB} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

$$\text{Ángulo } \widehat{BAO}: \quad \frac{\operatorname{sen} 75°}{6{,}9} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{BAO}}{3} \rightarrow \widehat{BAO} = 24°\ 49'$$

- En el triángulo AOD: $\widehat{AOD} = 180° - 75° = 105°$

$$\overline{AD}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105° \approx 68{,}87 \rightarrow \overline{AD} \approx 8{,}3 \text{ cm}$$

$$\text{Ángulo } \widehat{OAD}: \quad \frac{\operatorname{sen} 105°}{8{,}3} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{OAD}}{3} \rightarrow \widehat{OAD} = 20°\ 26'$$

$$\hat{A} = \widehat{BAO} + \widehat{OAD} = 45°\ 15' \qquad \hat{D} = 180° - \hat{A} = 134°\ 45'$$

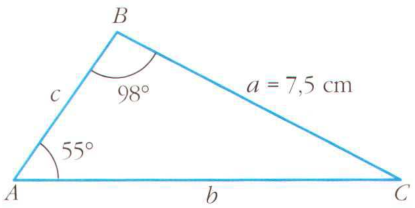
Los lados del paralelogramo miden 6,9 cm y 8,3 cm, y sus ángulos, 45° 15' y 134° 45'.

7 Resolución de triángulos (se conocen dos ángulos y un lado)

En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado:

$\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 98°$, $a = 7{,}5$ cm.

Resuelve el triángulo.



El ángulo $\hat{C} = 180° - (55° + 98°) = \boxed{27° = \hat{C}}$

Con el teorema de los senos hallamos los lados b y c.

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 98°} = \frac{7{,}5}{\operatorname{sen} 55°} \rightarrow b = \frac{7{,}5 \operatorname{sen} 98°}{\operatorname{sen} 55°} = \boxed{9{,}1 \text{ cm} = b}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 27°} = \frac{7{,}5}{\operatorname{sen} 55°} \rightarrow c = \frac{7{,}5 \operatorname{sen} 27°}{\operatorname{sen} 55°} = \boxed{4{,}2 \text{ cm} = c}$$

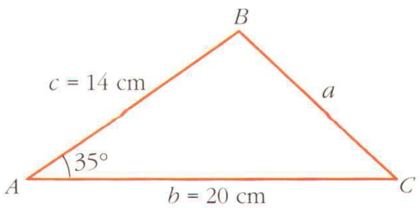
Existe solución única siempre que $\hat{A} + \hat{B} < 180°$.

8 Resolución de triángulos (se conocen dos lados y el ángulo comprendido)

En un triángulo se conocen:

$\hat{A} = 35°$, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm.

Resuelve el triángulo.



Se halla el lado a con el teorema del coseno:

$$a^2 = 20^2 + 14^2 - 2 \cdot 20 \cdot 14 \cos 35° \rightarrow \boxed{a = 11{,}7 \text{ cm}}$$

Como conocemos los tres lados, la solución es única siempre.

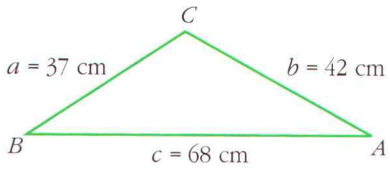
Calculamos el ángulo $\hat{C}$.

$$\frac{14}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{11{,}7}{\operatorname{sen} 35°} \rightarrow \boxed{\hat{C} = 43°\ 20'\ 25''}$$

$$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \boxed{\hat{B} = 101°\ 39'\ 35''}$$

9 Resolución de triángulos (se conocen los tres lados)

Resuelve un triángulo del que se conocen sus lados: a = 37 cm, b = 42 cm y c = 68 cm.



Calculamos los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ con el teorema del coseno:

$$37^2 = 42^2 + 68^2 - 2 \cdot 42 \cdot 68 \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{5019}{5712} \rightarrow \boxed{\hat{A} = 28° \ 31'}$$

$$42^2 = 37^2 + 68^2 - 2 \cdot 37 \cdot 68 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{4229}{5032} \rightarrow \boxed{\hat{B} = 32° \ 48' \ 55''}$$

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = \boxed{118° \ 40' \ 5'' = \hat{C}}$$

Existe solución única si cada lado es menor que la suma de los otros dos.

10 Resolución de triángulos (se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos)

En estos casos, puede no existir solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones.

Resuelve estos tres triángulos:

a) $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $\hat{A} = 25°$

b) $a = 12{,}6$ cm, $b = 26{,}4$ cm, $\hat{B} = 124° 34'$

c) $a = 82{,}6$ cm, $b = 115$ cm, $\hat{A} = 28° 4'$

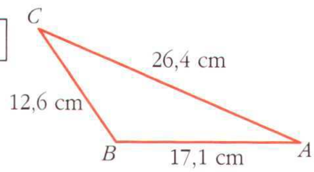
a) Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{3}{sen\ 25°} = \frac{8}{sen\ \hat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = 1{,}12.$$ Imposible. No existe solución.

b) Con el teorema de los senos calculamos $\hat{A}$:

$$\frac{12{,}6}{sen\ \hat{A}} = \frac{26{,}4}{sen\ 124° \ 34'} \rightarrow \boxed{\hat{A} = 23° \ 8' \ 33''}$$

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = \boxed{32° \ 17' \ 27'' = \hat{C}}$$



$$\frac{c}{sen\ 32° \ 17' \ 27''} = \frac{26{,}4}{sen\ 124° \ 34'} \rightarrow \boxed{c = 17{,}1 \text{ cm}}$$

No puede haber dos soluciones, porque, como $\hat{B}$ es obtuso, $\hat{A}$ y $\hat{C}$ tienen que ser agudos.

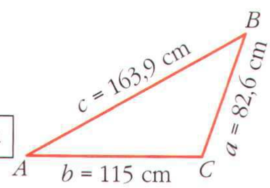
c) Al aplicar el teorema de los senos obtenemos dos valores para $\hat{B}$:

$$\frac{82{,}6}{sen\ 28° \ 4'} = \frac{115}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{B}_1 = 40° \ 55' \ 25'' \\ \hat{B}_2 = 180° - \hat{B}_1 = 139° \ 4' \ 35'' \end{array}}$$

Calculamos el ángulo $\hat{C}$ y el lado c en cada caso.

- $\hat{C}_1 = 180° - (\hat{A} + \hat{B}_1) = \boxed{111° \ 35'' = \hat{C}_1}$

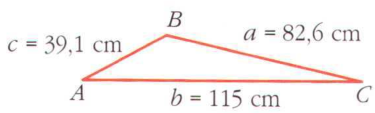
$$\frac{c_1}{sen\ 111° \ 35''} = \frac{82{,}6}{sen\ 28° \ 4'} \rightarrow \boxed{c_1 = 163{,}9 \text{ cm}}$$



- $\hat{C}_2 = 180° - (\hat{A} + \hat{B}_2) = \boxed{12° \ 51' \ 25'' = \hat{C}_2}$

$$\frac{c_2}{sen\ 12° \ 51' \ 25''} = \frac{82{,}6}{sen\ 28° \ 4'} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{c_2 = 39{,}1 \text{ cm}}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Relación entre razones trigonométricas

1 Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α $(0° < \alpha < 90°)$ utilizando las relaciones fundamentales:

a) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\ \alpha = \frac{3}{8}$ e) $cos\ \alpha = 0,72$ f) $tg\ \alpha = 3$

2 Sabiendo que el ángulo α es obtuso, completa la siguiente tabla:

sen α	0,92				0,5	
cos α			−0,12	−0,8		
tg α		−0,75				−4

3 Halla las restantes razones trigonométricas de α:

a) $sen\ \alpha = -4/5$ $\alpha < 270°$

b) $cos\ \alpha = 2/3$ $tg\ \alpha < 0$

c) $tg\ \alpha = -3$ $\alpha < 180°$

4 Expresa con un ángulo del primer cuadrante:

a) $sen\ 150°$ b) $cos\ 135°$ c) $tg\ 210°$

d) $cos\ 225°$ e) $sen\ 315°$ f) $tg\ 120°$

g) $tg\ 340°$ h) $cos\ 200°$ i) $sen\ 290°$

5 Si $sen\ \alpha = 0,35$ y $\alpha < 90°$, halla:

a) $sen\ (180° - \alpha)$ b) $sen\ (\alpha + 90°)$

c) $sen\ (180° + \alpha)$ d) $sen\ (360° - \alpha)$

e) $sen\ (90° - \alpha)$ f) $sen\ (360° + \alpha)$

6 Si $tg\ \alpha = 2/3$ y $0 < \alpha < 90°$, halla:

a) $sen\ \alpha$ b) $cos\ \alpha$

c) $tg\ (90° - \alpha)$ d) $sen\ (180° - \alpha)$

e) $cos\ (180° + \alpha)$ f) $tg\ (360° - \alpha)$

7 Halla con la calculadora el ángulo α:

a) $sen\ \alpha = -0,75$ $\alpha < 270°$

b) $cos\ \alpha = -0,37$ $\alpha > 180°$

c) $tg\ \alpha = 1,38$ $sen\ \alpha < 0$

d) $cos\ \alpha = 0,23$ $sen\ \alpha < 0$

Resolución de triángulos rectángulos

8 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos $(\widehat{C} = 90°)$ hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

b) $a = 43$ m, $\widehat{A} = 37°$. Halla b, c, $\widehat{B}$.

c) $a = 7$ m, $\widehat{B} = 58°$. Halla b, c, $\widehat{A}$.

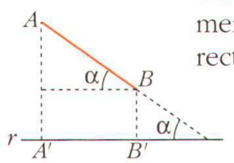
d) $c = 5,8$ km, $\widehat{A} = 71°$. Halla a, b, $\widehat{B}$.

9 Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?

10 Una escalera de 2 m está apoyada en una pared formando un ángulo de 50° con el suelo. Halla la altura a la que llega y la distancia que separa su base de la pared.

11 El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°. ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

12

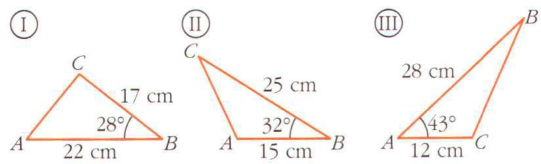


Calcula la proyección del segmento $\overline{AB} = 15$ cm sobre la recta r en los siguientes casos:

a) $\alpha = 72°$ b) $\alpha = 50°$

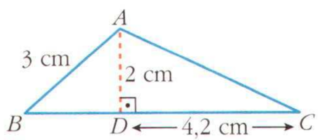
c) $\alpha = 15°$ d) $\alpha = 90°$

13 a) Halla la altura correspondiente al lado AB en cada uno de los siguientes triángulos:



b) Halla el área de cada triángulo.

14 En el triángulo ABC, AD es la altura relativa al lado BC. Con los datos de la figura, halla los ángulos del triángulo ABC.



15 Desde un punto P exterior a una circunferencia de 10 cm de radio, se trazan las tangentes a dicha circunferencia que forman estre sí un ángulo de 40°.

Calcula la distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia.

Teorema de los senos

16 Calcula a y b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 15$ m.

17 Halla el ángulo $\hat{C}$ y el lado b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 50°$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.

18 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\hat{A} = 35°$ $\quad \hat{C} = 42°$ $\quad b = 17$ m

b) $\hat{B} = 105°$ $\quad b = 30$ m $\quad a = 18$ m

19 Dos amigos situados en dos puntos, A y B, que distan 500 m, ven la torre de una iglesia, C, bajo los ángulos $\widehat{BAC} = 40°$ y $\widehat{ABC} = 55°$. ¿Qué distancia hay entre cada uno de ellos y la iglesia?

Teorema del coseno

20 Calcula a en el triángulo ABC, en el que: $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ m, $c = 15{,}3$ m.

21 Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m, $c = 35$ m.

22 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $b = 32$ cm $\quad a = 17$ cm $\quad \hat{C} = 40°$

b) $a = 85$ cm $\quad c = 57$ cm $\quad \hat{B} = 65°$

c) $a = 23$ cm $\quad b = 14$ cm $\quad c = 34$ cm

23 Desde la puerta de mi casa, A, veo el cine, C, que está a 120 m, y el kiosko, K, que está a 85 m, bajo un ángulo $\widehat{CAK} = 40°$. ¿Qué distancia hay entre el cine y el kiosko?

Resolución de triángulos cualesquiera

24 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 100$ m $\quad \hat{B} = 47°$ $\quad \hat{C} = 63°$

b) $b = 17$ m $\quad \hat{A} = 70°$ $\quad \hat{C} = 35°$

c) $a = 70$ m $\quad b = 55$ m $\quad \hat{C} = 73°$

d) $a = 122$ m $\quad c = 200$ m $\quad \hat{B} = 120°$

e) $a = 25$ m $\quad b = 30$ m $\quad c = 40$ m

f) $a = 100$ m $\quad b = 185$ m $\quad c = 150$ m

g) $a = 15$ m $\quad b = 9$ m $\quad \hat{A} = 130°$

h) $b = 6$ m $\quad c = 8$ m $\quad \hat{C} = 57°$

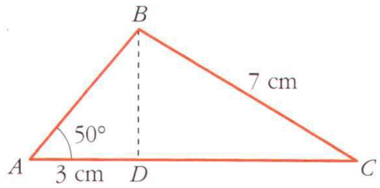
PARA RESOLVER

25 Una estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del pedestal.

26 Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

27 Halla el lado del octógono inscrito y del octógono circunscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

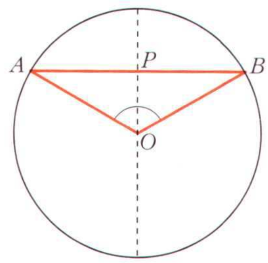
28 Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC.



☛ *En el triángulo rectángulo ABD, halla $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. En BDC, halla $\hat{C}$ y $\overline{DC}$. Para hallar $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.*

29 En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro.

Halla el ángulo $\widehat{AOB}$.

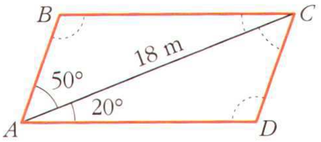


☛ *El triángulo AOB es isósceles.*

30 Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

31 En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

32 Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:



☛ $\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. *Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.*

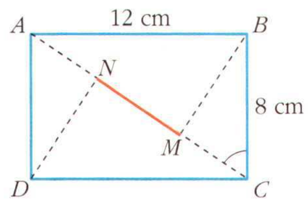
33 Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127°. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m).

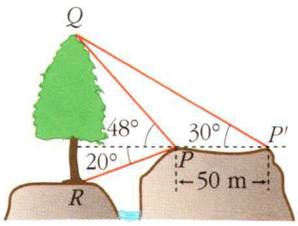
34 En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC, y desde D, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN.

☛ *En el triángulo ABC, halla* $\hat{C}$. *En el triángulo BMC, halla* $\overline{MC}$. *Ten en cuenta que:*

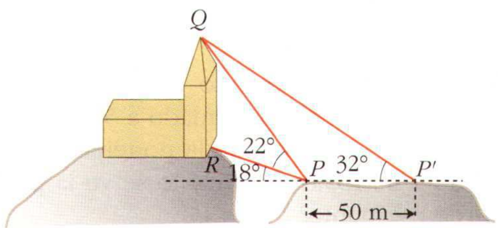
$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$



35 Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.

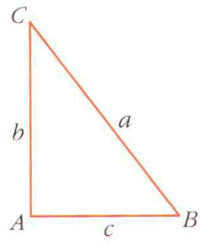


36 Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.



CUESTIONES TEÓRICAS

37 Explica si las siguientes igualdades referidas al triángulo ABC son verdaderas o falsas:



1) $a = \dfrac{b}{sen\,\hat{A}}$ 2) $c = a\cos\hat{B}$

3) $c = \dfrac{b}{tg\,\hat{C}}$ 4) $b = a\,sen\,\hat{C}$

5) $tg\,\hat{B} \cdot tg\,\hat{C} = 1$ 6) $c\,tg\,\hat{B} = b$

7) $sen\,\hat{B} - \cos\hat{C} = 0$ 8) $a = \dfrac{b}{\cos\hat{C}}$

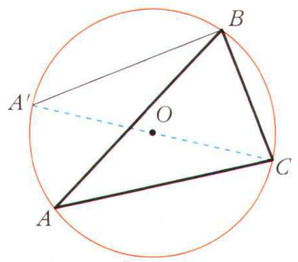
9) $b = \dfrac{c}{tg\,\hat{B}}$ 10) $\sqrt{1 - sen^2\hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

11) $sen\,\hat{B} \cdot \cos\hat{C} = 1$ 12) $\dfrac{sen\,\hat{B}}{\cos\hat{C}} = 1$

38 Prueba que en un triángulo cualquiera se verifica:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R$$

R es el radio de la circunferencia circunscrita.



☛ *Traza el diámetro desde uno de los vértices del triángulo ABC. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y A'BC.*

39 Prueba que solo existe un triángulo con estos datos:

$$b = \sqrt{3}\text{ m},\quad a = 1{,}5\text{ m},\quad \hat{A} = 60°$$

¿Existe algún triángulo con estos datos?

$$\hat{C} = 135°,\quad b = 3\sqrt{2}\text{ cm},\quad c = 3\text{ cm}$$